ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 3(17), 2013, с.??—??

УДК (519.766.2)

(Ю. М. Сметанин)

(Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений)

Аннотация. (Рассматривается #P-полная задача вычисления всех выполняющих подстановок для булевой функции от n булевых переменных $F(x_1, x_2,\ldots, x_n)=1$ и новый способ ее решения за счет приведения ее к задаче вычисления множества U, такого, что $F(X_1, X_2,\ldots, X_n)=U$, в которой X_n заранее известные множества).

(Переменные x_n в логическом уравнении являются характеристическими функциями для множеств X_n из второго равенства, которое названо МЛ-уравнением.

Обсуждаются прикладные аспекты, основывающиеся на решении редуцированной задачи последовательный алгоритм решения которой может быть легко распараллелен.).

Ключевые слова и фразы: (логические уравнения, силлогистика, алгебраическая онтология, алгебраическая система, SAT задачи, непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле, неклассическая, многозначная, конструктивная, пропозициональная логика, булева алгебра)

Введение

Следуя А. Тарскому введено новое понятие – непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле (НЛССС), позволяющее построить логику (силлогистику) на основе нового базиса силлогистики

$$NOB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X = U, X \subset U \rangle$$

с интерпретацией в алгебре множеств. Ортогональный базис силлогистики

$$OB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y) \rangle$$

введен автором в работах [1],[2] как альтернатива базису Аристотеля для традиционной силлогистики (ТС), который, как известно, состоит из четырех категорических суждений [3].

$$AB_S = \langle AXY, EXY, IXY, OXY \rangle,$$

и имеет неоднозначную интерпретацию в семи расширенных жергонновых отношениях, входящих в состав 15 модельных схем, введенных в работе [3], смотри Рисунок 1.

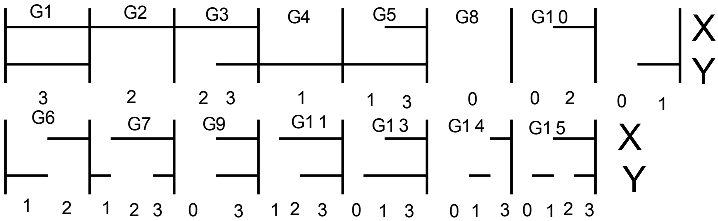

Рис 1. Логические отношения между объемами терминов X, Y.

Схемы во втором ряду уместно назвать невырожденными, а схемы первого ряда вырожденными жергонновыми отношениями. Невырожденные отношения выражаются в OB_S, а вырожденные в NOB_S. Например, $G_{14}(X,Y) = A(X,Y')$, $G_{13}(X,Y) = A(X,Y)$, $G_6(X,Y') = Eq(X,Y')$, $G_9(X,Y) = Eq(X,Y)$, $G_5(X,Y) = (X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y = U)$ [1]. Отношения, задаваемые невырожденными жергонновыми отношениями называются логическими.

Если пополнить OB_S двумя суждениями, то в новом базисе односмысловом базисе силлогистики $NOB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X \subset U, X = U \rangle$ можно выразить все пятнадцать модельных схем с Рисунка 1.

[1] Знаки (+, ·, ')для множеств означают операции объединения, пересечения и дополнения до универсума U. Для суждений это логические операции «и», «или» и «отрицание» .

В работе решается задача поиска общих и частных решений МЛ-уравнений (нетождественных равенств)[4]

$$F\left(X_1,\, X_2,\ldots,\, X_n\right)=U \qquad (1)$$

в которых левая часть есть ППФ алгебры множеств, построенная на модельных множествах, а правая есть универсум. МЛ-уравнение

$$F\left(X_1,\, X_2,\ldots,\, X_n\right)'=\varnothing$$

называется двойственным для (1). К виду (1) также сводится нетождественное равенство вида

$$F_1(\tilde{X}_n)=F_2(\tilde{X}_n)$$

К рассматриваемой задаче сводится задача верификации НЛССС для посылок и следствия выраженных суждениями NOB_S и задача решения логических уравнений.

$$F\left(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n\right)=1$$

Переменные x_n в логическом уравнении являются характеристическими функциями для множеств X_n из уравнения (1).

1. Алгебраическая онтология как логико-семантическая модель

Определение 1

Непарадоксальным логическим следованием в семантическом смысле (НЛССС) называется отношение между формулами G и B, означающее что, в случае, когда G и B выполнимые формулы (не законы и не противоречия) в силу только их логической структуры нельзя приписать G значение «истинно» (выполнено), не будучи быть вынужденным приписать значение «истинно» (выполнено) B. Обозначим НЛССС как $G \vDash_N B$, его отсутствие как $\nvDash$ [2].

[2] Из девяти возможных комбинаций (закон T, противоречие F, выполнимость P) между посылкой и следствием в отношении НЛССС может находиться только одна комбинация $P \vDash_N P$.

Рассмотрим модель которая задает n-арное логическое отношение между модельными множествами. Обозначим через $B(\tilde{X}_n)$ семейство из всех подмножеств универсума, которые могут быть построены из конечной системы $\tilde{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, образующих множеств, являющихся собственными, не пустыми подмножествами универсума U, посредством операций объединения, пересечения и дополнения до универсума. Семейство $B(\tilde{X}_n)$ - основа включает также универсум и пустое множество. Всего можно составить не более чем 2^n непустых конституент, являющихся элементарными «кирпичиками», из которых можно конструировать указанные выше подмножества универсума, порождаемые системой образующих $\tilde{X}_n$. Конституенты выражаются так:

$$X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \cdots \cdot X_n^{\sigma_n},\ X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \sigma_i = 1 \\ X_i', & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Из конституент можно сочетать не более чем $(2)^{2^n}$ различных подмножеств универсума, включая пустое множество и сам универсум. Рассмотрим алгебраическую систему (2)

$$\langle B(\tilde{X}_n), \quad \mathrm{W}_F, \quad \mathrm{W}_R \rangle, \tag{2}$$

где $\mathrm{W}_F = \{+, \cdot, '\}$, $W_R = \{=, \subset\}$ [3]

В алгебре логики конституенты

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\sigma_n},\ x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i, = 1 \\ x_i', & \sigma_i = 0, \end{cases}$$

принято называть полными конъюнкциями операции $\{+, \cdot, '\}$ есть логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. При заданном порядке переменных каждой конституенте (полной

[3] $\mathrm{W}_F = \{+, \cdot, '\}$ -операции объединение, пересечение, дополнение до универсума алгебры множеств

конъюнкции) можно сопоставить набор $\langle\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\rangle$ из нулей и единиц и соответствующее ему десятичное число, которое будем называть индикатором (номером) конституенты.

Определение 2

Зафиксируем порядок образующих множеств алгебраической системы (1), например, $\pi=\langle i_1,i_2,...,i_n\rangle, X_{i_1}, X_{i_2},\cdots,X_{i_n}$ Такую алгебраическую систему будем называть системой с заданным порядком образующих или просто заданной и обозначим ее как

$$\langle B(\tilde{X}_n,\pi),\quad \mathrm{W}_F,\quad \mathrm{W}_R\rangle^{4} \tag{3}$$

Определение 3

Единицей (M) заданной алгебраической системы (3) или характеристическим множеством, называется семейство непустых конституент данной системы.

Если все конституенты заданной алгебраической системы (3) являются непустыми множествами, то такую АС будем называть канонической.

Базовой системой номеров $BSN(U)$ универсума называется множество номеров конституент единицы заданной алгебраической системы. Базовую систему номеров также будем называть конституентным множеством.

Нулем (N) заданной алгебраической системы (3) или дополнением единицы, будем называть семейство ее пустых конституент.

Базовой системой номеров *BSN(X)* любого непустого множества *X* из $B(\Sigma_n,\pi)$ будем называть множество номеров (индикато-

---

[4] В данной работе согласно принципу конкретности «истины» и «лжи» булевы переменные x_i считаются характеристическими функциями (индикаторами) модельных множеств, то есть для произвольного элемента универсума $e\in U$ имеет место соотношение $x_i=\begin{cases}1, e\in X_i\\ 0, e\notin X_i\end{cases}$.

ров) непустых конституент из характеристического множества, таких, что объединение этих конституент совпадает с данным множеством[5] .

По аналогии с бинарными логическими отношениями *A(X, Y); Eq(X, Y); IO(X, Y)* рассмотренными ранее, введем понятие n-арного логического отношения. Оно задается с помощью алгебраической системы (3), путем указания номеров конституент ее единицы M.

Определение 4

Заданная АС полностью определяется кортежом множеств (4)

$$I = \langle U, X_1, X_2, \cdots, X_n \rangle, M(I) = U, \tag{4}$$

который мы будем называть n-арным логическим отношением между ее модельными множествами $\tilde{X}_n$. Будем также называть кортеж (4) моделью мира или алгебраической онтологией (А-онтологией[6]).

А-онтологию $I^0 = \langle U^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0 \rangle$ у которой все конституенты не пусты будем называть канонической. Отношение, задаваемое канонической А-онтологией, будем называть **отношением независимости в совокупности n-модельных множеств.** Очевидно, что $M(I^0) = U^0 = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, смотри Рисунок 2.

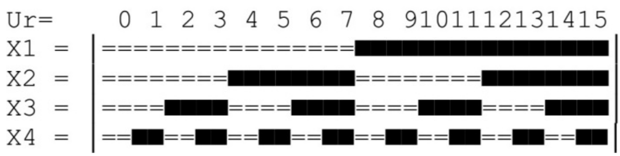

Рис. 2 Способ формирования образующих канонической АС

---

[5] Далее, если это специально не оговорено будем считать, что в заданной системе (2) все множества и универсум заданы в виде *BSN*, то есть как конституентные множества.

[6] Наглядно А-онтологию будем изображать в виде линейной диаграммы (смотри Рисунки 2, 3), которая боле наглядна по сравнению с диаграммой Венна.

Теорема 1

Для А-онтологии I с n модельными множествами и универсумом $U(I)$ выполняются соотношения (5)

$$\begin{aligned}
&1.\ M=\bigcup\{i\}, K(i)\neq\varnothing\\
&2.\ N=\{\bigcup_{i\in\{0,1,\dots,2^n-1\}\setminus M} K(i)\}\\
&3.\ N=\{\bigcap_{i\in M} D(i'))\}; i=2^n-i'-1, i'=2^n-i-1\\
&4.\ M=\{\bigcap_{i\in N} D(i')\})\\
&5.\ X_i=U(I)\cdot X_i^0=M\cdot X_i^0,\ i=\overline{1,n};
\end{aligned} \tag{5}$$

X_i^0-термины канонической онтологии смотри Рисунок 2 и определение (3), $D(i')=K(i)'$ - дизституента двойственная i-ой конституенте $K(i)$[7].

Доказательство

Для доказательства достаточно заметить, что множество $D(i')=U^0\setminus\{i\}$ здесь $U^0=M$ универсум канонической А-онтологии.

Отметим, что n-арное логическое отношение, составленное из непустых конституент, однозначно определяет **полный набор бинарных логических и не логических (вырожденных) отношений** их количество равно числу сочетаний C_n^2, в которых попарно сочетаются модельные множества из семейства $\tilde{X}_n=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$. Состав бинарных отношений не зависит от упорядочения модельных множеств. Обратное отображение перечня бинарных отношений в многоместное логическое отношение является неоднозначным, смотри рисунок (4). **Из соотношения 5. Теоремы 1 следует, что объемы модельных множеств А-онтологии полностью определяются ее универсумом (единицей).**

---

[7] Порецкий П.С. называл дизституенты в своей работе [5] продуцентами.

Определение 5

Полный набор (множество всех) бинарных отношений между модельными множествами для заданной А-онтологии *I* будем называть полным бинарным инвариантом *BIN(I)*, определяемого А-онтологией n-арного логического отношения. Если набор неполный (входящие в него бинарные отношения заданы не для всех возможных сочетаний модельных множеств), то такой набор называется неполным бинарным инвариантом *nBIN(I)*. Доказано, что в каждый *BIN*, входит **максимальная** по числу конституент А-онтология, при этом добавление к ее единице любой непустой конституенты выводит эту А-онтологию из данного *BIN*.

Замечание 1

Логическое содержание максимальной А-онтологии выражается ее *BIN*. Логическое содержание не максимальной А-онтологии с данным *BIN* выражается ее *BIN* в совокупности с суждениями NOB_S выражающими пустоту констиуент, которые не входят в данную А-онтологию по сравнению с максимальной.

А-онтология позволяет однозначно выразить n-арное логическое отношение в виде равенства $F(X_n) = U$ [8], где $F(\tilde{X}_n)$ - ППФ алгебры множеств. Модельные множества, выраженные номерами конституент, и вся А-онтология могут быть представлены совершенной нормальной формой Кантора (*SNFK*). Например, левая А-отология Рисунка 3 представляется как МЛ-уравнение с левой частью в форме *SNFK* (4).

$$X_1' \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + X_1' \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2' \cdot X_3' \cdot X_4' + X_1 \cdot X'_2 \cdot X_3' \cdot X_4$$
$$+X_1 \cdot X_2 \cdot X'_3 \cdot X_4' + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 = U \qquad (5)$$

Либо через равносильную левой части этого равенства ППФ, например, $X_1 \cdot X_3' + X_2 \cdot X_4 = U$ (смотри Рисунок 3).

[8] Если это равенство не тождественное, то оно далее называется МЛ-уравнением.

```
Ur=     5 7 8 9121315
X1 =  |====██████████|G
X2 =  |████====██████|S
X3 =  |==██========██|X
X4 =  |████==██==████|Y
```

```
Ur=     5 7 8 91215
X1 =  |====████████|G
X2 =  |████====████|S
X3 =  |==██======██|X
X4 =  |████==██==██|Y
```

```
BIN={ A(X1^, X2), IO(X1,X3),A(X1^, X4), A(X2^,X3^), IO(X2, X4), A(X3,X4 )
```

Рис. 3 Иллюстрация понятия бинарный инвариант

Логическое содержание правой А-онтологии входящая в бинарный инвариант левой может быть выражено как конъюнкция отношений NOB_S так:

$$Q(\tilde{X}_4) = A(X_1', X_2) \cdot IO(X_1, X_3) \cdot A(X_1', X_4) \cdot A(X_2', X_3') \cdot$$
$$IO(X_2, X_4) \cdot A(X_3, X_4) \cdot [(X_1' + X_2' + X_3 + X_4') = U] \quad (6)$$

Для того, чтобы по логическому содержанию А-онтологии найти ее единицу в виде конституентного множества нужно последовательно вводить элементы конъюнкции в виде отношений NOB_S в каноническую А-онтологию. Для введения отношений в форме утверждений NOB_S, используются теоремы исчисления конституентных множеств . В результате по логическому содержанию (6) получится универсум (единица) правой А-онтологии на Рисунке 3. .

Терема 2[о функциональной полноте NOB_S]

Имеет место функциональная полнота простых суждений нового базиса силлогистики, то есть логическое содержание любой А-онтологии может быть выражено конъюнкцией простых утверждений NOB_S

Например, в NOB_S левая А-онтология с Рисунка 3 может быть выражена как отношение (7), либо как (6) без последнего сомножителя в конъюнкции $Q(\tilde{X}_4)$.

$$(X_1 \cdot X_3' + X_2 \cdot X_4) = U \quad (7)$$

Правая А-онтология может быть выражена конъюнкцией суждений (8)

$$(X_1 \cdot X_3' + X_2 \cdot X_4 = U) \cdot (X_1' + X_2' + X_3 + X_4' = U) \quad (8)$$

Либо как конъюнкция

$$A(X_1'+X_3, X_2\cdot X_4)\cdot[(X_1\cdot X_2\cdot X_3'\cdot X_4)'=U]$$

Автором в работах [1], [2], [5]-[8] построено исчисление конституентных множеств, позволяющее преобразовывать А-онтологии для придания им наперед заданных свойств.

2. Исчисление конституентных множеств

Теорема 3

В А-онтологии (4) отношение $X \subseteq Y$ двух множеств выполняется тогда и только тогда, когда все конституенты $K_{X\cdot Y'}(i), i \in BSN(U)$ содержащиеся в пересечении $X\cdot Y'$ являются пустыми.

Теорема 4

Выполнение одного из логических отношений $G_9(X,Y)$, $G_{13}(X,Y)$ и невыполнение бинарных отношений $G_1(X,Y), G_4(X,Y), G_5(X,Y), G_8(X,Y), G_{12}(X,Y)$ равносильно суждению

$(X = X\cdot Y)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$, либо суждению

$(X'+Y=U)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$. При этом $G_{13}(X,Y) \equiv (X'+Y=U)\cdot(X+Y' \subset U)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot$ $(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$.

Теорема 5

В А-онтологии (4) отношение

$X=Y \equiv (X'=U)\cdot(Y'=U)+(X=U)\cdot(Y=U)+$
$(X=Y)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)$

выполняется тогда и только тогда, когда все конституенты $K_{X'\cdot Y}(i), i \in BSN(U)$, , содержащие произведения $X'\cdot Y$ и все конституенты $K_{X\cdot Y'}(j), j \in BSN(U)$, содержащие произведения $X\cdot Y'$ являются пустыми, то есть

$(X \cdot Y' = \varnothing) \cdot (X' \cdot Y = \varnothing) \equiv X \cdot Y' + X' \cdot Y = \varnothing.$

По другому истинно высказывание $(X \cdot Y + Y' = U) \cdot (X' + X \cdot Y = U)$ или равносильное ему $(X \cdot Y + Y') \cdot (X' + X \cdot Y) = U$ или равносильное $X \cdot Y + X' \cdot Y' = U.$

Теорема 6

Справедливо утверждение $X \subset Y \equiv (X' + Y) \cdot (X + Y' \subset U)$

Теорема 7

В А-онтологии (4) отношение независимости *IO(X, Y)* выполняется тогда и только тогда, когда все множества $X \cdot Y$, $X' \cdot Y$, $X \cdot Y'$, $X' \cdot Y'$ являются не пустыми.

Доказательство

Доказательство теорем 3-7 производится непосредственной проверкой выполнения условий теоремы на модельных схемах с Рисунка 1.

Для построения А-онтологии с заданными свойствами используется теорема 8.

Теорема 8

1. Чтобы ввести в n-арную А-онтологию отношение $X \subset U$ достаточно добавить к ее единице хотя бы одну конституенту с номером из множества номеров конституент образующих множество $X' = U^0 \setminus X$, где U^0 -универсум n-арной канонической А-онтологии.

2. Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = U$ необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X' = U \setminus X$.

3. Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X \subset Y$ необходимо убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X \cdot Y'$.

4.Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = Y$ необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из множества конституент образующих множество $X' \cdot Y + X \cdot Y'$.

5.Чтобы ввести в А-онтологию отношение $IO(X, Y)$ достаточно добавить в нее хотя бы по одной конституенте с номерами из тех множеств $X'\cdot Y'$, $X'\cdot Y$, $X\cdot Y'$, $X\cdot Y$, которые являются в ней пустыми.

Замечание 2

На основе теорем исчисления конституент построен и программно реализован алгоритм позволяющий вычислять максимальную, по числу непустых конституент, А-онтологию по ее логическому содержанию, выраженному в NOB_S. [9] Различие между максимальной и не максимальной А-онтологией показано на Рисунке 3, при этом видно, что добавление хотя бы одной непустой конституенты в левую, максимальную А-онтологию выводит ее из иллюстрируемого *BIN*.

3. Решение МЛ-уравнений

Определение 6

МЛ-уравнениям называется нетождественное[10] равенство вида $\Psi(\tilde{X}_n)=\Phi(\tilde{X}_n)$, либо $\Phi(\tilde{X}_n)=U$, либо $\Phi(\tilde{X}_n)=\varnothing$, где $\Psi(\tilde{X}_n),\Phi(\tilde{X}_n)$-ППФ алгебры множеств составленные из модельных множеств. Известно [4], что любое уравнение можно привести к виду $F(\tilde{X}_n)=U$, либо к виду $\Phi(\tilde{X}_n)=\varnothing$. Далее будем рассматривать только такие МЛ-уравнения.

Два уравнения $\Psi(\tilde{X}_n)=U,\Phi(\tilde{X}_n)=U$ называются равносильными, если $\Psi(\tilde{X}_n)=\Phi(\tilde{X}_n)$ тождественное равенство. Все множество МЛ-уравнений равносильных $\Psi(\tilde{X}_n)=U$ тожественных определяется классом, который определяется $SNFK(\Psi(\tilde{X}_n))$.

---

[9] То есть единица А-онтологии виде конституентного множества вычисляется по логическому содержанию посредством данного алгоритма.

[10] Нетождественные в смысле того, что левая часть не может быть приведена к правой с помощью законов алгебры множеств.

Данная *SNFK* определяет класс равносильных ей ППФ, которые можно получить из нее на основании законов алгебры множеств.

Для равносильных МЛ-уравнений имеет место НЛССС.

$\Psi(\tilde{X}_n) \vDash_N \Phi(\tilde{X}_n)$ и $\Phi(\tilde{X}_n) \vDash_N \Psi(\tilde{X}_n)$.

Определение 7

Общим решением МЛ-уравнения $\Psi(\tilde{X}_n) = U$ называется все множество равносильных ему МЛ-уравнений, которые непарадоксально следуют из него и оно следует из них.

Эти следствия - множество МЛ-уравнений определяются классом эквивалентности состоящим из равносильных ППФ, который представлен ППФ - $\Psi(\tilde{X}_n)$, либо равносильной ей *SNFK*. **Частным решением** называется множество МЛ-уравнений каждое из которых несет только часть логического содержания исходного уравнения то есть справедливо утверждение (10)

$$[\Psi(\tilde{X}_n) \vDash_N \Phi(\tilde{X}_n)] \cdot [\Phi(\tilde{X}_n) \nvDash \Psi(\tilde{X}_n)] \qquad (10)$$

Утверждение 1

Теоремы исчисления конституентных множеств и теорема о функциональной полноте NOB_S показывают, что любая конъюнкция утверждений NOB_S может быть редуцирована к МЛ-уравнению.

Теорема 9

Единица МЛ-уравнения $F(\tilde{X}_n) = U$ в виде конституентного множества $U_r = M(F(\tilde{X}_n) = U)$ вычисляется посредством присваивания ему значения $U_r := F(\tilde{X}_n^0)$, где $\tilde{X}_n^0$ - конституентные множества, выражающие модельные множества канонической А-онтологии.

Например, конъюнктивная формула $Q(\tilde{X}_4)$ из суждений NOB_S - $Q(\tilde{X}_4) = A(X_1', X_2) \cdot A(X_1', X_4) \cdot A(X_2', X_3') \cdot A(X_3, X_4)$ может быть приведена посредством теорем исчисления высказываний к следующей системе МЛ-уравнений, каждое их которых соответствует одному из конъюнктов. В свою очередь эта система равносильна МЛ-уравнению (9).

$$[(X_1 + X_2) = U] \cdot [(X_1 + X_4) = U] \cdot [(X_2 + X_3') = U] \cdot [(X_3' + X_4) = U]$$

$$(X_1 + X_2) \cdot (X_1 + X_4) \cdot (X_2 + X_3') \cdot (X_3' + X_4) = U \qquad (9)$$

МЛ-уравнение (9) имеет общее решение определяемое объемом его единицы, которая вычисляется по Теореме 9.

$\mathrm{U} \coloneqq (X_1{}^0 + X_2{}^0) \cdot (X_1{}^0 + X_4{}^0) \cdot (X_2{}^0 + (X_3{}^0)') \cdot ((X_3{}^0)' + X_4{}^0)$ при значениях модельных множеств канонической четырехарной А-онтологии (смотри Рисунок 2).

$X_1^0 = \{8,9,10,11,12,13,14,15\}; X_2^0 = \{4,5,6,7,12,13,14,15\};$

$X_3^0 = \{2,3,6,7,10,11,14,15\}; X_4^0 = \{1,3,5,7,9,11,13,15\};$

В результате вычислений получаем

$M(Q(\tilde{X}_4)) = \{5,7,8,9,12,13,15\}$. Эта единица определяет СНФК, по которой можно вычислить общее решение МЛ-уравнения (9) (смотри Определение 7 и Рисунок 3).

Определение 8

Два уравнения $\Psi(\tilde{X}_n) = U$ и $\Phi(\tilde{X}_m) = U$ называются приведенными к одной системе образующих, если $\tilde{X}_n = \tilde{X}_m$

Для приведения уравнений $\Psi(\tilde{X}_n) = U$ и $\Phi(\tilde{X}_m) = U$ к одной системе образующих необходимо выполнить следующие действия:

1. Вычислить приведенную систему образующих $\tilde{X}_r = \tilde{X}_n \cup \tilde{X}_m$ путем объединения семейств образующих обоих уравнений.

2. Привести каждое уравнение к одной системе образующих $\Psi_r(\tilde{X}_r) = U$ и $\Phi_r(\tilde{X}_r) = U$, добавив в каждое МЛ-уравнение термины из множеств $\tilde{X}_r \setminus \tilde{X}_n$ и $\tilde{X}_r \setminus \tilde{X}_m$ соответственно. Добавление

термина X_r легче всего сделать «умножив» левую часть МЛ-уравнения на «сумму» - $(X_r + X_r{}')$.

Теорема 10

Логическое содержание А-онтологии $I_2 - Log(I_2)$ является частью логического содержания А-онтологии $I_1 - Log(I_1)$, тогда и только тогда, когда их единицы находятся в соотношении $M(I_1) \subseteq M(I_2)$. При этом строгое включение выполняется только тогда, когда $\big(Log(I_1) \vDash_N Log(I_2)\big) \cdot \big(Log(I_2) \nvDash Log(I_1)\big)$. То есть тогда, когда МЛ-уравнение сопоставленное I_2 несет неравнозначную часть логического содержания МЛ-уравнения, сопоставленного I_1.

4. Решение логического уравнения путем вычисления единицы соответственного МЛ-уравнения.

МЛ-уравнению $F(X_1, X_2, ..., X_n) = U$ можно однооднозначно сопоставить логическое уравнение $F(\tilde{x}_n) = 1$, здесь булевы переменные $x_i, i = 1,..,n$ являются характеристическими функциями модельных множеств X_i. Разработан алгоритм поиска поиска всех выполняющих подстановок для $F(\tilde{x}_n) = 1$, посредством применения М-алгоритма для вычисления единицы $M(F(X_1, X_2, ..., X_n))$. М-алгоритм можно эффективно распараллелить. При этом доказано, что $M(F(X_1, X_2, ..., X_n)) = F(X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0)$, где $X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$ модельные множества канонической n-арной А-онтологии.

Пример нахождения всех выполняющих подстановок для логического уравнения. Пусть дано уравнение $x_2 \sim x_3 + (x_1 \Rightarrow x_3)' = 1$, приведем его к базису «и, или, не»,
$x_2 \sim x_3 + x_1 \Rightarrow x_3 \equiv x_{2'} \cdot x_{3'} + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3{}' = U$. Соответственное

ему МЛ-уравнение имеет вид $X_{2'} \cdot X_{3'} + X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_3{}' = U$. По Теореме 3 имеем

$$M(X_{2'} \cdot X_{3'} + X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_3{}') = \{0,1,4,5\} \cdot \{0,2,4,6\} +$$
$$\{2,3,6,7\} \cdot \{1,3,5,7\} + \{4,5,6,7\} \cdot \{0,2,4,6\} =$$
$$\{0,4\} + \{3,7\} + \{3,7\} = \{0,3,4,6,7\}.$$

Отсюда следует, что полный набор выполняющих подстановок для исходного логического уравнения есть

$$\{\langle 0,0,0,\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,1,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}.$$

Заключение

В работе предложен новый, обладающий возможностью параллельного выполнения алгоритм поиска всех выполняющих подстановок для логического уравнения.

Благодарности. *Автор искренне благодарен Николаю Николаевичу Непейводе за информацию о представлении сверхбольших чисел в ЭВМ и рекомендации при обсуждении идей данной статьи.*

Список литературы

[1] Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 155-166.

[2] Сметанин Ю. М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 172-185.

[3] Бочаров В.А. Силлогистические теории /Бочаров В. А., Маркин В.И. - М.: Прогресс-Традиция, 2010. - 336 с.

[4] Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики.// Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук об-

щества естествоиспытателей при Казанском университете, т. 2, Каз.,1884.

[5] Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики как основа пропозициональной логики. // Восьмые Смирновские чтения по логике: материалы Международной научной конференции., Москва, 19-21 июня 2013 г. [редкол.: И.А. Герасимова, Д.В. Зайцев, А.С. Карпенко, О.М. Григорьев, Н.Е. Томова; отв. ред. В.И. Маркин] - М.: Современные тетради, 2013. - 160с. - ISBN 978-5-88289-414-5. С. 73-76

[6] Сметанин Ю. М. Смысловое содержание последовательности простых субъектно-предикатных суждений //OSTIS 2014, материалы четвёртой международной конференции «Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем», Минск, 2012. С. 263-267.

[7] Сметанин Ю. М. Решение логических равенств Порецкого в модели на основе алгебраической системы. // Теория управления и моделирование. Тезисы доклада Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9-11 июня 2016 г.). – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. - 340 с. С. 299-301.

[8] Сметанин Ю. М. Многозначная пропозициональная логика с непарадоксальным логическим следованием.// Девятые Смирновские чтения по логике: материалы Международной научной конференции., Москва, 19-21 июня 2013 г. [редкол.: И.А. Герасимова, Д.В. Зайцев, А.С. Карпенко, О.М. Григорьев, Н.Е. Томова; отв. ред. В.И. Маркин] - М.: Современные тетради, 2013. - 160с. ISBN 978-5-88289-414-5. С. 73-76

Об авторе:

(Сметанин Юрий Михайлович)

(К.ф.-м.н, доцент, область научных интересов прикладная логика, место работы — ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»)

e-mail: (gms1234gms@rambler.ru)

(IU. M. Smetanin). (**Not paradoxical the logical following of the semantic sence and problem of the search for a solution the ML-equations**).

Abstract. (In this paper we consider #N-complete problem of computing all performing a lookup for Boolean equations from N Boolean variables $F(x_1, x_2,..., x_n)=1$ and a new way to solve this problem by bringing it to the problem of determination of the set U, which is determined by the equation $F(X_1, X_2,..., X_n)=U$, where $X_1, X_2,..., X_n$ is initially a certain family of finite sets.

Variables $x_1, x_2,..., x_n$ of a logical equation are the characteristic functions of the sets $X_1, X_2,..., X_n$ from the second equality, which is referred to as ML-equation.

Discuss the applications, based on the solution of problem $F(X_1, X_2,..., X_n)=1$. In particular, solving the problem of checking logical entailment. Shows what the sequential algorithm of solutions of the equation can be parallelized).

Key Words and Phrases: (*logical equations, syllogistics, algebraic ontology, algebraic system, SAT task , not paradoxical logic following in the semantic sense, non-classical, many-valued, constructive, propositional logic, Boolean algebra*).