Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием

Шворин, Артем Борисович

Аннотация

Предлагаются результаты исследования интервального представления действительных чисел в системах счисления с перекрытием. Для аддитивных арифметических операций в таких системах построены алгоритмы, обладающие поразрядным параллелизмом и пригодные для реализации в аппаратуре. Найдены ограничения на параметры системы, при которых достигается заданная точность.

Введение

Довольно давно было известно, что сложение чисел имеет линейную сложность по количеству разрядов слагаемых и в общем случае поразрядному распараллеливанию не поддается. Например, этот факт был отмечен в 1946 г. фон Нейманом и соавторами в статье [3]. Такое положение дел характерно для традиционных позиционных систем счисления, однако существуют представления, где сложение может выполняться параллельно. В 1840 г. Коши [4] исследовал систему счисления с основанием 10, но имеющую нестандартный набор цифр $\{-5, \dots 5\}$, и заметил, что в такой системе переносы ограничены. Брауэр в 1921 [2] сконструировал систему счисления с основанием 2 с тремя цифрами, значения которых перекрывались. Его целью, однако, был не параллелизм сложения, а возможность организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы старшие разряды результата могли быть получены из ограниченного количества разрядов слагаемых. На рис. 1 приведен пример, когда в традиционной десятичной системе счисления невозможно узнать цифру результата, не зная всех цифр слагаемых, в то время как в системе Брауэра такой проблемы нет.

Обобщение позиционных систем счисления, названное β-expansion, было введено Rényi [9] (1957) и более подробно изучено Parry [8] (1960). Основная идея, описанная в этих работах, заключалась в представлении вещественного числа в виде $x = \sum_{-m}^{n} d_i \beta^i$ для заданного основания $\beta > 1$, где $d_i \in \mathbb{Z} \cap [0, b]$ — цифры ($b \geqslant \lceil \beta \rceil$). В этих работах был предложен простой последовательный алгоритм вычисления цифр d_i для заданного

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} 0.0999\ldots \\ 0.0000\ldots \end{array} \\
\hline
0.?
\end{array}
$$

Рис. 1: Сложение в десятичной системе

x. Далее Avizienis в статье [1] (1961), во-первых, формализовал проблему параллельного сложения и, во-вторых, описал достаточно общий класс систем счисления и алгоритмов сложения.

Начиная с 1990-х, существенный вклад был внесен Frougny и другими авторами. Например, в статьях [6, 5, 7] были найдены условия на параметры системы, необходимые для существования параллельного алгоритма сложения, а также была поставлена задача минимизации мощности алфавита (набора цифр) для данного базиса β при сохранении возможности параллельного сложения.

В приведенной выше серии работ, начина с Rényi, ставилась задача точного представления некоторого подмножества действительных (или комплексных) чисел. Из этого, в частности, вытекает требование, чтобы основание системы счисления было алгебраическим. В работе Непейводы и др. [10] (2014) вместо точного представления предлагается интервальное, то есть записи в виде конечной последовательности цифр ставится в соответствие не число, а отрезок. В рамках данной статьи подразумевается именно такое интервальное представление, благодаря чему удается снять ограничения на основание системы счисления, и в качестве основания может быть взято произвольное вещественное число, превосходящее единицу. Тем не менее сохраняются ограничения на параметры системы, связанные с известным ранее требованием избыточности. Поскольку в данной работе представление чисел не точно, появляется необходимость следить за точностью результата. В работе [11] приведены соответствующие оценки, связывающие потерю точности результата сложения (количество теряемых разрядов) с параметрами системы.

Данная статья наследует обозначения Непейводы, которые не совпадают с обозначениями Avizienis и ряда последующих работ.

1 Системы счисления с перекрытием

В работе [10] приводится следующее определение.

Определение 1. *Системой с перекрытием представления чисел на отрезке* $[low, high]$ *задается четверкой*

$$\langle low, high, \nu = \lambda i.\nu_i, \varepsilon = \lambda i.\varepsilon_i \rangle ,$$

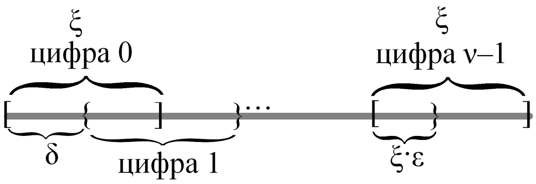

Рис. 2: Разбиение диапазона на цифры

где

$$\nu : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, \quad \varepsilon : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q},$$
$$\forall i \in \mathbb{N}^+ \nu_i > 1$$
$$\exists \varepsilon^* \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \mathbb{N}^+ 0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon^* < 1.$$

Числа ν_i называются основаниями, ε_i — перекрытиями. Если функции постоянны, то система называется равномерной, идентифицируется интервалом изменения, основанием ν и перекрытием ε.

Далее будет рассматриваться более узкий класс систем. Во-первых, берутся только равномерные системы: $\nu_i = \nu = const$, $\varepsilon_i = \varepsilon = const$, во-вторых, отрезок, на котором представлены числа, выбран единичным: $[low, high] = [0, 1]$. Таким образом, система задается только двумя параметрами $\langle \nu, \varepsilon \rangle$.

Рис. 2 [10] иллюстрирует разбиение единичного отрезка на перекрывающиеся части, соответствующие цифрам. Используемые здесь обозначения связаны следующими соотношениями:

$$\delta = \xi - \epsilon, \quad \epsilon = \xi\varepsilon, \quad (\nu - 1)\delta + \xi = 1$$

Введем дополнительные обозначения:

- $\mu = \nu - 1$
- $I_+(A, \Delta) = [A, A + \Delta], \quad I_-(A, \Delta) = [A - \Delta, A]$.

Следующее определение связывает число с его представлением в системе с перекрытием.

Определение 2. *Для $\alpha \in [0, 1]$ запись в системе с перекрытием $\langle \nu, \varepsilon \rangle$*

$$\alpha \sim \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_N},$$

где $a_i \in \{0, \dots, \mu\}$ — цифры, означает по определению, что

$$\alpha \in I_+\left(\delta \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{i-1}, \xi^n\right) \quad \text{для } n \in \{1, \dots, N\}. \tag{1}$$

Для представления чисел бо́льших единицы достаточно добавить слева несколько старших разрядов с отрицательными номерами:

$$\alpha \sim \overline{a_{-N'}a_{-N'+1}\dots a_{-1}a_0 \bullet a_1a_2a_3\dots a_N}.$$

Здесь символ ($\bullet$) является аналогом десятичной запятой, то есть используется в качестве разделителя между нулевым разрядом и первым. За счет добавления старших разрядов отрезок, на котором представлены числа, расширяется до $[0, \xi^{-N'-1}]$. Тогда определение 2 обобщается до следующего вида:

$$\alpha \in I_+\left(\delta \sum_{i=-N'}^{n} a_i\xi^{i-1}, \xi^n\right) \quad \text{для } n \in \{-N', \dots, N\}. \tag{2}$$

Эти обозначения из [10] наследуются в статье [11]. Но в более ранних работах — в [1] и последующих — используются другие обозначения. Эти две системы обозначений могут быть выражены друг через друга. В частности, основание системы счисления β из [1] будет выражаться как $\beta = 1/\xi$, $\beta > 1$.

2 Построение алгоритма сложения

Задача сложения чисел формулируется следующим образом. Пусть даны представления m чисел

$$\alpha_j \sim \overline{a_{j1}a_{j2}\dots a_{jN}}, \quad j \in \{1, \dots m\},$$

и требуется найти представление их суммы

$$\gamma \equiv \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sim \overline{c_{-q+1}\dots c_1c_2\dots c_{N-p}}.$$

Здесь $q > 0$ — количество добавляемых слева разрядов, $p > 0$ — количество теряемых справа разрядов (из-за неизбежной в общем случае потери точности).

Точность p может быть выражана через параметры системы и находится из следующей оценки [11]:

$$\mu\xi\frac{1 - m\xi^p}{1 - \xi} \geqslant 1, \tag{3}$$

откуда получается оценка наилучшего значения точности:

$$p^* = \min\left\{ p \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mu\xi\frac{1 - m\xi^p}{1 - \xi} \geqslant 1 \right\}. \tag{4}$$

Для случая $\xi = 1/z$, $z \in \mathbb{Z}$ найден [11] следующий алгоритм вычисления цифр c_n.

$$s_n := \begin{cases} 0 & \text{для } n \in \{-p+1, \dots, 0\} \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} & \text{для } n \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

$$\theta_n := \left\{ \sum_{i=1}^{p} s_{n+i} \xi^i \right\} \quad \text{для } n \in \{-p, \dots, N-p\}$$

$$c_n := s_{n+p}\xi^p - \theta_n + \frac{\theta_{n-1}}{\xi} \quad \text{для } n \in \{-p+1, \dots, N-p\}$$

В этом решении $q = p$, то есть справа к результату добавляется столько же разрядов, сколько теряется слева. Известны алгоритмы, для которых $q < p$, однако, во-первых, они вычислительно сложнее, и, во-вторых, довольно трудно использовать на практике тот факт, что для хранения результа требуется меньше разрядов, чем для хранения операндов.

Заключение

Рассмотрен класс систем счисления с перекрытием, при этом используется не точное, а интервальное представление чисел. Поставлена задача параллельного сложения нескольких чисел в заданном представлении.

Дана оценка точности (количества теряемых разрядов результата) в зависимости от параметров системы. Предложен алгоритм сложения нескольких чисел, обладающий поразрядным параллелизмом, для случая, когда параметры системы удовлетворяют условию $\xi = 1/z$, $z \in \mathbb{Z}$.

Список литературы

[1] A. Avizienis. Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Transactions on Electronic Computers*, 10:389–400.

[2] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reele zahl eine dezimalbruchentwicklung? *Mathematische Annalen*, 83(3–4):201–210.

[3] A. Burks, H. H. Goldstine, and J. von Neumann. Preliminary discussion of the logic design of an electronic computing instrument.

[4] A. Cauchy. Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. *C. R. Acad. Sci. Paris (Série I)*, 11:789–798.

[5] Ch. Frougny, E. Pelantova, and M. Svobodova. Minimal digit sets for parallel addition in non-standard numeration systems. *Journal of Integer Sequences*, 16.

[6] Ch. Frougny, E. Pelantova, and M. Svobodova. Parallel addition in non-standard numeration systems. 412.

[7] Ch. Frougny and J. Sakarovitch. Number representation and finite automata. In *Combinatorics, Automata and Number Theory*, volume 135, pages 34–107. Cambridge University Press.

[8] W. Parry. On the β-expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 11:401–416.

[9] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 8:477–493.

[10] Н. Н. Непейвода, И. Н. Григоревский, and Е. П. Лилитко. О представлении действительных чисел. *Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн.*, 5(4(22)):105–121.

[11] А.Б. Шворин. Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием. *Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн.*, 6(2(25)):101–117.