ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ АНАЛИЗ МАТРИЦ СЖАТОГО ИЗМЕРЕНИЯ ТИПА РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМОВ

И.Е. Капорин

Вычислительный центр им.А.А.Дородницына РАН Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, Москва 119333, ул. Вавилова, 40

С использованием нестандартной меры обусловленности симметричных положительно определенных матриц, вводится новая мера качества матриц сжатого измерения. В случае, когда матрица сжатого измерения является нормированным жестким фреймом, для этой меры качества строится нетривиальная нижняя оценка, зависящая только от размеров матрицы и ее подматриц. Обсуждается связь полученной оценки с известными результатами теории сжатого измерения, а также возможное применение ее следствий для построения и анализа матриц сжатого измерения.

Построение и анализ прямоугольных матриц специального типа является главной проблемой в теории и практике методологии сжатого измерения (Compressed Sensing) [1]-[3]. Рассматриваемая область исследований связана, например, с важными приложениями в области цифровой обработки сигналов (оптических, томографических, радарных и т.п.). Мы вводим и анализируем аналог свойства ограниченной изометрии матрицы (Restricted Isometry Property, RIP), которое используется для теоретического обоснования алгоритмов сжатого измерения. Главным требованием к $m \times n$-матрице сжатого измерения $A = [a_1 | \ldots | a_n]$ является достаточно выраженная линейная независимость ее столбцов. Формально, возникает необходимость количественной характеризации степени линейной независимости столбцов любой $m \times k$-подматрицы $A_J = [a_{j_1} | \ldots | a_{j_k}]$, где $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ и $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$, причем желательно использование как можно больших значений *k*. Подчеркнем, что количество всех таких подматриц равно C_n^k, что делает невозможным (для требуемых размеров матриц) исчерпывающую прямую проверку каких-либо условий.

Наиболее типичным предположением относительно *A*, см., напр., [1], является свойство ограниченной изометрии, требующее, чтобы для всякого разреженного *n*-вектора *y* с числом ненулевых компонент, не превосходящим *k*, при некотором $0 < \delta(k) < 1$ выполнялись неравенства $1 - \delta(k) \le \|Ay\|^2 / \|y\|^2 \le 1 + \delta(k)$. Таким образом, для спектрального числа обусловленности любой $k \times k$-матрицы $A_J^* A_J$, определяемого через ее крайние собственные значения как $C(A_J^* A_J) = \lambda_{\max}(A_J^* A_J) / \lambda_{\min}(A_J^* A_J)$, должна соблюдаться оценка сверху вида $C(A_J^* A_J) \le (1 + \delta(k)) / (1 - \delta(k))$. (Через A^* обозначается матрица, полученная из *A* транспонированием и комплексным сопряжением.)

К настоящему времени, для размеров матриц и их соотношений ($n >> m >> 1$), представляющих практический интерес, неизвестны ни способы быстрой оценки величин типа $\max_{|J|=k} C(A_J^* A_J)$ или $\delta(k)$ для заданной матрицы *A*, ни способы построения матриц *A*, гарантирующие какие-либо удовлетворительные границы для этих величин при $k = O(m^{1-\varepsilon})$, где $0 < \varepsilon << 1$. Существующие оценки такого рода носят лишь вероятностный характер. В докладе рассматриваются детерминистские оценки, для чего предлагаются критерии качества *A* иные, чем RIP-условие. Также представлена нижняя граница для величины $\delta(k)$, зависящая только от *k, m* и *n*, сопоставимая с известными результатами вероятностного анализа.

Наряду со спектральным числом обусловленности матрицы $A_J^* A_J$, предлагается использовать К-число обусловленности [4], которое вводится соотношением $K(A_J^* A_J) = (k^{-1}\mathrm{trace}(A_J^* A_J))^k / \det(A_J^* A_J)$. Предполагается, что матрица *A* является нормализованным ($\mathrm{Diag}(A^* A) = I_n$) жестким фреймом ($AA^* = (n/m) I_m$) (Unit Norm Tight Frame, UNTF). Главный результат формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Для любой* $m \times n$*-матрицы A, где m < n, удовлетворяющей условиям* $AA^* = (n/m) I_m$ *и* $\mathrm{Diag}(A^* A) = I_n$*, при любом* $2 \le k \le m$ *справедлива оценка*

$$\max_{|J|=k} K(A_J^* A_J) \ge \left(\frac{m}{n}\right)^k \frac{C_n^k}{C_m^k} > \exp\left(\frac{(k-1)k}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right). \qquad (1)$$

Заметим, что при *k=2* результат Теоремы 1 совпадает с известной границей Уэлча (Welch bound) [5]. Связь с известными результатами, полученными в терминах RIP-свойства и $\delta(k)$, установлена в [11]:

$$\delta(k) \ge \sqrt{\frac{k-1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)}.$$

Переписав полученную оценку как

$$k \le 1 + 2\delta(k)^2 m \Big/ \left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

видим, что она хорошо согласуется со стандартными вероятностными оценками типа

$$k \le C\delta(k)^2 m \Big/ \log\frac{n}{m}$$

(см., напр., [1]), отвечающими использованию случайных матриц сжатого измерения.

Помимо теоретических выводов, из Теоремы 1 непосредственно следует критерий оптимальности матрицы сжатого измерения, заключающийся в требовании выполнения в (1) равенства вместо нестрогого неравенства, что позволяет определить класс «k-равнобъемных жестких фреймов». При *k=2* этому требованию отвечает в точности класс ETF-матриц, т.е., равноугольных жестких фреймов (Equiangular Tight Frames) [6]-[10].

Определяющим свойством ETF-матриц является то, что модули всех внедиагональных элементов соответствующей матрицы Грама A^*A равны своему минимально возможному значению $((n-m)/((n-1)m))^{1/2}$. При $k>3$, возможно, нельзя рассчитывать на существование матриц такого вида, однако введенное условие равнообъемности может быть ослаблено по аналогии с обобщениями ETF-матриц, рассмотренных в [8], [10].

Работа поддерживалась грантом РФФИ (код проекта 14-07-00805) и грантом НШ-4640.2014.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Foucart and H. Rauhut, *A mathematical introduction to compressive sensing,* Basel, Birkhauser, 2013, 585p.
2. Б.С. Кашин, В.Н. Темляков, Замечание о задаче сжатого измерения // Матем. заметки, 2007, том 82, вып. 6, 829–837.
3. О.Н. Граничин, Д.В. Павленко, Рандомизация получения данных и L1-оптимизация (опознание со сжатием) // Автомат. и телемех., 2010, Т.71, № 11, 3–28.
4. И. Капорин. *Предобусловливание итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (М.: 2011)
5. L. R. Welch. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals // IEEE Transactions on Information Theory 20 (1974) 397–399.
6. M.A. Sustik, J.A. Tropp, I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr. On the existence of equiangular tight frames //Linear Algebra and its Applications 426 (2007) 619–635.
7. M. Fickus, D.G. Mixon, J.C. Tremain. Steiner equiangular tight frames //Linear Algebra and its Applications 436 (2012) 1014–1027.
8. S. Waldron. On the construction of equiangular frames from graphs. Linear Algebra and its Applications 431 (2009) 2228–2242.
9. Fickus M., Mixon D.G. Tables of the existence of equiangular tight frames //arXiv preprint arXiv:1504.00253. – 2015.
10. Thill M., Hassibi B. Group Frames with Few Distinct Inner Products and Low Coherence // arXiv preprint arXiv:1509.05087. – 2015.
11. I.Kaporin. Deterministic bounds on the restricted isometry in compressed sensing matrices //Abstracts of 4th International Conf. on Matrix methods in Mathematics and Applications (MMMA-2015), August 24-28, 2015, Skolkovo, Skoltech Publ., P.43.