ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ В СРЕДЕ MATHCLOUD

А. П. Афанасьев[1], С. М. Дзюба[2], И. И. Емельянова[2]

[1]*127994, Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, ИППИ РАН;*
e-mail address: apa@isa.ru

[2]*170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22, ТвГТУ;*
e-mail address: sdzyuba@mail.ru

Приведен метод синтеза оптимального управления с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию. Данный метод базируется на специальном методе последовательных приближений, сходимость которого позволяет доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения. В работе рассмотрено аналитическое и численное исследование данного метода и его реализация в системе MathCloud. Приводится численный эксперимент построения оптимального управления физическим маятником.

Ключевые слова: управление нелинейной системой по квадратичному критерию, численные и аналитические исследования, метод последовательных приближений, система MathCloud.

1 ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{1}$$

В котором $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ – m-мерный действительный вектор управления, A и B – действительные (n × n)- и (n × m)-матрицы, а $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j},\ i, j = 1,\ldots n,$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j},\ i = 1,\ldots, n,\ j = 1,\ldots, m,$$

В пространстве $\Re^{n+m}$.

Предположим, что начальное состояние

$$x(0)=c \tag{2}$$

задано, а задача управления системой (1.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int [\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle]dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle, \tag{3}$$

В котором *T* – фиксированное конечное время, *Q* и *P* – положительные полуопределенные (n × n)-матрицы, *R* – положительно определенная (m × m)-матрица,

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

– ошибка системы и $z = (z^1, \ldots, z^n)$ – заданный режим функционирования.

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к рассматриваемой задаче приводит к достаточно сложной краевой задаче, если только (1)–(3) не сводится к линейно-квадратичной задаче слежения (см., например [1]). Однако, во многих практических ситуациях режим z(t) устроен так, что указанное сведение невозможно.

В общем случае для получения решения (или оценок решения) задачи (1)–(3) используют самые разные методы (см., например [2]–[9]). Одним из основных методов здесь является метод последовательных приближений, описанный в [2]. Внешне простой и понятный, он (метод) сводит исходную задачу к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач. Вместе с тем, указанный метод до сих пор не получил широкого распространения, поскольку его сходимость не доказана. Последнее, в частности, объясняется тем, что здесь в схеме последовательных приближений оператор системы меняется от итерации к итерации.

Целью настоящей работы является получение решения задачи (1)–(3) в виде закона управления с обратной связью. Для получения искомого решения используется процедура, являющаяся модификацией метода [2] и заключающаяся в создании некой специальным образом генерируемой последовательности вспомогательных линейно-квадратичных задач. Это позволяет в некоторых случаях установить сходимость метода, а из сходимости доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения.

2 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Формально опишем метод последовательных приближений, на котором будут базироваться все дальнейшие построения.

Следуя [9], для всех N=0,1,… рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle]dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \tag{4}$$

с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N),\ x(0)=c \tag{5}$$

где x_N и u_N – некоторые функции, определенные и непрерывные на отрезке [0, T].

Для фиксированных x_N, u_N и (5) оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (1) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \tag{6}$$

В котором $x_{N+1}(t)$ – решение уравнения(5), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(0) = c,$$

K(t) – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \tag{7}$$

с граничным условием

$$K(T)=P, \tag{8}$$

а $h_{N+1}(t)$ – решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \tag{9}$$

С граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T) \tag{10}$$

(см. [1]).

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ задано, то соотношения (4)–(10) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех малых значения T позволяет установить существование решения задачи (1)–(3) и дает эффективную процедуру построения этого решения. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{11}$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c]. \tag{12}$$

Замечание 1. Автономность системы (1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе нигде не используются и приняты для простоты обозначений.

3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Применим метод (7)–(12) для изучения простейшего варианта задачи (1)–(3), в котором значение T предполагается достаточно малым. Такую задачу будем называть локальной.

Существование и структуру оптимального управления в локальной задаче (1)–(3) устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть* ***c****–произвольная точка пространства* $\Re^n$. *Тогда найдется такое положительное число* $\Im$ *, что для всех* $\boldsymbol{T}\in(0,\Im)$ *существует оптимальное управление* $u^*(t)$ *в задаче (1)–(3). При этом для всех* $t\in[0,T]$

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \tag{13}$$

где $x*(t)$– *решение уравнения*

$$\dot{x}^*(t) = Ax^* + Bu^* + F(x^*, u^*) \tag{14}$$

с начальным условием

$$x^*(t) \equiv c, \tag{15}$$

а $h^*(t)$ *– решение уравнения*

$$\dot{h}^*(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f(x^*(t), u^*(t))$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T). \tag{16}$$

Замечание 2. Легко видеть, что метод последовательных приближений (7)–(12) может быть использован для отыскания решения задачи (1)–(3) для всех достаточно малых значений T.

Переходя к рассмотрению общего случая задачи (1)–(3) с произвольным конечным горизонтом, заметим, что справедлива

Теорема 2. *Предположим, что последовательность* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots$ *, сгенерированная методом (7)–(12), равномерно ограничена. Тогда множество*

$$\Omega(\varphi_0) = \bigcap_{N\ge 0}\overline{\bigcup_{k\ge N}\varphi_k}$$

Непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно. При этом

$$\Omega(\varphi_0) = \lim_{N \to +\infty} \varphi_N. \tag{17}$$

Доказательство теорем 1 и 2 в этой работе опускаются.

Следствие. *Предположим, что в условиях теоремы 2 множество $\Omega(\phi_0)$ состоит из единственной функции ϕ_*. Тогда в задаче (1)– (3) существует оптимальное управление $u_*(t)$, удовлетворяющее равенствам (13)–(16).*

Замечание 3. Каждое компактное инвариантное множество, как известно, содержит компактное минимальное множество (см., например [10]). Поэтому в условиях теоремы 2 множество $\Omega(\varphi_0)$ содержит компактное минимальное множество $\aleph$.

Если $\varphi_\aleph = (x_\aleph, h_\aleph)$ – произвольная функция множества $\aleph$, то в силу теорем 1 и 2 несложно заметить, что закон управления

$$u(t) = R^{-1}B' [h_\aleph(t) - K(t)x(t)] \tag{18}$$

В любом случае можно считать хорошим приближением к решению задачи (1)–(3).

Отметим также, что в силу следствия теоремы 2 сходимость метода (6)–(12) устанавливает существование решения задачи (1)–(3) и вид оптимального управления.

4 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ В СРЕДЕ MATHCLOUD

Численное исследование решений задачи (1)-(3), опирающееся на теоремы 1 и 2, было осуществлено с помощью сервисов системы MathCloud (см. рис.1).

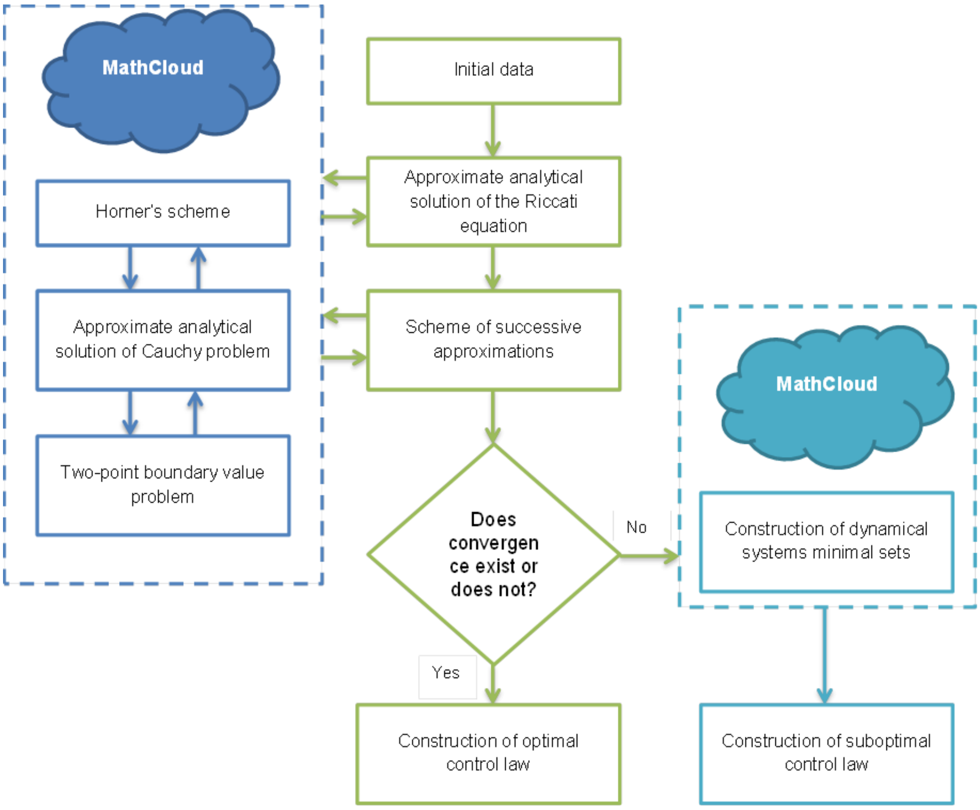

Рис. 1. Численное исследование решений задачи (1)-(3), опирающееся на теоремы 1 и 2

Целью данной системы является предоставление унифицированного доступа к проблемно-ориентированным вычислительным сервисам и поддержка интеграции этих сервисов в решение прикладных задач (см., например [11]).

В основе системы MathCloud лежат следующие принципы: удобство разработки сервисов, простой доступ к этим сервисам и применение открытых технологий. Для этих целей активно используются современные веб-технологии. Сервис-ориентированный подход позволяет пользователям MathCloud абстрагироваться от необходимым им конкретных ресурсов и формулировать запрос к системе в терминах предметной области. Это существенно облегчает задачу неподготовленному пользователю. Данный подход также идеально подходит для интеграции программных ресурсов, таких как математические и вычислительные пакеты. В случае, когда для выполнения запроса сервису требуются вычислительные ресурсы, данный запрос может преобразовываться в вычислительные задания, запускаемые на кластере или в грид. Тем самым, MathCloud также опирается на существующие вычислительные ресурсы и инфраструктуры. Однако детали реализации вычислений внутри сервиса скрыты от его пользователей.

Нижний уровень архитектуры MathCloud содержит вычислительные ресурсы, используемые для функционирования сервисов среды. Формально данный уровень не относится к самой среде MathCloud, а формируется из доступных разработчикам и пользователям ресурсов – суперкомпьютеров, кластеров, сегментов грид-сетей с установленным необходимым оборудованием.
На уровне сервисов реализуется удаленный программный доступ к некоторой востребованной пользователям MathCloud функциональности. Прикладные сервисы, являющиеся главными компонентами среды, ориентированы на решение определенного класса математических задач и служат основой для создания. Большинство математических ресурсов могут быть представлены в виде одной или нескольких функций, каждая из которых имеет свой набор входных и выходных параметров.
На уровне приложений реализуется доступ пользователей к сервисам MathCloud через проблемно-ориентированные интерфейсы.

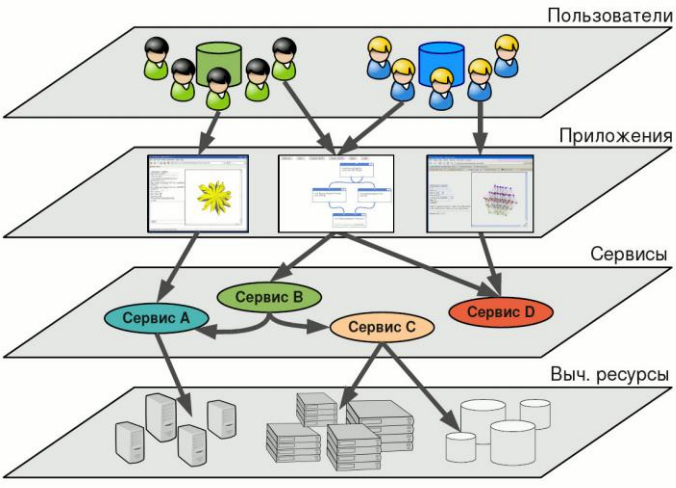

Рис. 2. Архитектура MathCloud

Для численного исследования решений задачи (1) - (3) были использованы стандартные сервисы системы MathCloud, позволяющие эффективно строить решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих сервисах решения строятся в виде ряда тейлоровского типа. Потому важным является использования сервиса эффективного вычисления значений многомерных многочленов на основе обобщенной схемы Горнера. Для построения решений двухточечной краевой задачи также использовались сервисы из системы MathCloud. Для построения минимальных множеств к системе MathCloud подключались дополнительные оригинальные сервисы. Численное исследование проводилось для уравнения Ван дер Поля и систем Лоренца и Валлиса. Рассматривалась как задача стабилизации, так и задача слежения для этих систем. Как показали исследования, во всех случаях имела место сходимость метода последовательных приближений на любом конечном отрезке времени.

Численное исследование задач (1) - (3) проводилось с помощью сервисов системы MathCloud. Как показали вычислительные эксперименты, для уравнения Ван дер Поля и систем Лоренца и Валлиса (см., например [12]) сходимость метода последовательных приближений имела место на любом конечном отрезке времени как для задачи стабилизации, так и для задачи слежения.

5 ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

В качестве простейшего приложения полученных выше результатов, рассмотрим задачу управления математическим маятником с трением и вращающимся моментом.
Пример. Уравнение математического маятника с трением и вращающимся моментом имеет следующий вид:

$$\ddot{x} = \sin x + \varepsilon \dot{x} = u, \tag{19}$$

где x - координата маятника, u - вращающий момент и ε - некоторое положительное число. Задача об автоколебательных режимах маятника подробно изучена при любых значениях ε и u в случае, когда вращающий момент u есть величина постоянная. Здесь же будет рассмотрена задача о подборе вращающего момента u таким образом, чтобы маятник имел асимптотически устойчивый в целом периодический режим периода, равного единице, возможно более близкий к режиму

$$x = \sin 2\pi t, \quad \dot{x} = 2\pi \cos 2\pi t.$$

Обозначим требуемый вращающий момент через u* и для его отыскания проведем стандартную замену

$$\begin{cases} x^1 = x, \\ x^2 = \dot{x}. \end{cases} \tag{20}$$

В координатах (20) система (19) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -\sin x^1 - \varepsilon x^2 + u. \end{cases} \qquad (21)$$

Далее, положим

$$x = (x^1, x^2)$$

и

$$f(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin x^1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (21) может быть переписана в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x). \qquad (22)$$

На первый взгляд сформулированную выше задачу об отыскании вращающего момента u* представляется уместным трактовать как задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big[\big\langle x(t) - \varphi(t), Q(x(t) - \varphi(t)) \big\rangle + ru(t)^2 \Big] dt,$$

где

$$\varphi(t) = (\sin 2\pi t, 2\pi\cos 2\pi t),$$

r - некое положительное число, а *Q* - некая симметрическая положительно определенная матрица. Но так как функция

$$x = \sin 2\pi t$$

Не является решением уравнения

$$\ddot{x} + \sin x + \varepsilon\dot{x} = 0$$

то, как несложно заметить, данная задача не имеет решений. Поэтому для отыскания вращающего момента u* введем в рассмотрение функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\big\langle x(t) - \varphi(t), Q(x(t) - \varphi(t)) \big\rangle + ru(t)^2 \Big] dt + \frac{1}{2}\big\langle x(1) - \varphi(1), Px(1) - \varphi(1) \big\rangle, \qquad (23)$$

где и *P* - некоторая симметрическая положительно полуопределенная матрица.

Решение задачи о минимизации функционала (23) имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{r} B' \, [h(t) - K(t)x(t)],$$

где *K(t)* – действительная симметрическая положительно определенная матричная функция размерности (2x2), являющаяся решением матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA(t) - A'(t)K + \frac{1}{r} KBB'K - Q$$

с граничным условием

$$K(1) = P,$$

а h(t) – двумерная действительная функция, являющаяся решением системы

$$\dot{h} = -\frac{1}{r}[A(t) - BB'K(t)]' h - Q\varphi(t) + K(t)h(t)$$

с граничным условием

$$g(1) = P\varphi(1).$$

Для решения указанной задачи была использована реализация нашего метода в системе MathCloud.

Управление u* на всей длине оси $\Re^+$ строилось по формуле:

$$u^*(t) = \begin{cases} B'\big[h(t) - K(t)x(t)\big]/r, & 0 \le t \le 1, \\ u^*(t-1), & t \ge 1. \end{cases} \qquad (24)$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены на рис.3 и рис. 4.

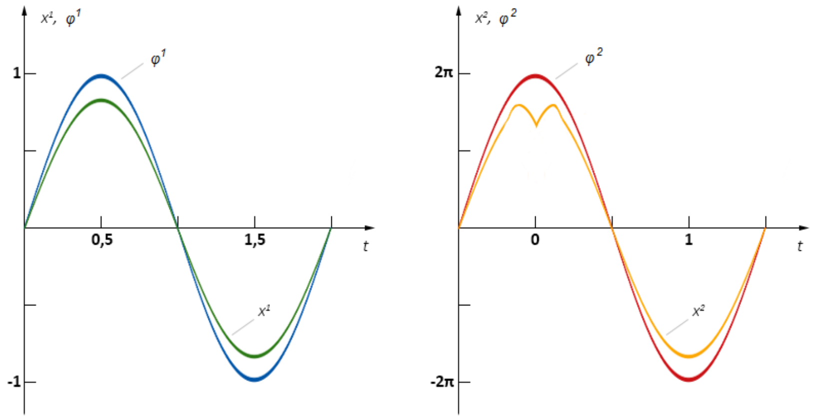

Рис.3. Периодическая функция x и функция φ (случай A).

Здесь (рис.3) предполагать, что ε=0,1 и

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 0{,}0093.$$

Если же принять (рис.4), что ε=0,1 и

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 10 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 0{,}0074148$$

то с помощью описанного выше алгоритма легко проверить, что при данных матрицах *Q* и *P* и параметре *r* так же справедливо равенство (24).

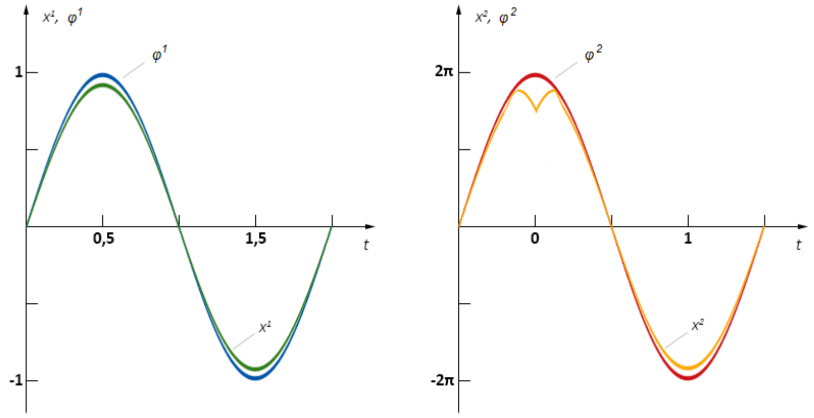

Рис.4. Периодическая функция x и функция φ (случай B).

Согласно расчетам, каждый из режимов, изображенных на рисунках 3 и 4, как правило, асимптотически устойчив в целом.

6 ОБСУЖДЕНИЕ

Задача управления динамическими системами по квадратичному критерию является классической задачей современной теории управления. Для линейных систем эта задача полностью решена и ее решение полно и подробно описано во многих книгах (см., например [1]).
Для нелинейных систем одно из первых ее рассмотрений приведено в книге [2]. Здесь описана некоторая схема последовательных приближений, которая в некоторых случаях дает оптимальное управление в виде закона с обратной связью. Особенностью метода, описанного в [2] является то, что оператор системы меняется от итерации к итерации. Это затрудняет аналитическое исследование задачи и чрезвычайно усложняет вычислительную процедуру. Поэтому данный метод не нашел широкого применения.
В работах [3]-[6] были рассмотрены различные аспекты задачи (от построения оптимального управления до доказательства существования ее решения).Однако, результаты, изложенные в [3]-[6] относятся к частным случаям систем и не имеют общего характера.
В работах [7]-[9] была осуществлена модификация схемы последовательных приближений Р. Беллмана. Это позволило описать общий метод построения решений в виде закона управления с обратной связью и в ряде случаев установить существование решения задачи.
В настоящей работе описана модифицированная схема последовательных приближений из [9] и ее реализация в системе MathCloud. Данная схема дает решение задачи во многих важных случаях. Вместе с

тем, вопрос о сходимости метода на произвольном конечном горизонте пока остается открытым и является темой дальнейших исследований.
Отметим также, что в перспективе возможно более эффективное использование ресурсов MathCloud, например, для дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью (см. [13]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты No. 13-07-00077 и 15-01-08838).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Атанс М., Фалб П. “*Оптимальное управление”*, М.: Машиностроение, 1968.
[2] Беллман Р, “*Процессы регулирования с адаптацией”*, М.: Наука, 1964.
[3] D.L. Lukes, *“Optimal Regulation of Nonlinear Systems”*, SIAM J. Control Optim., vol. 7, pp. 75–100, 1969.
[4] Y. Yamamoto, *“Optimal Control of Nonlinear Systems with Quadratic Perfor-mance”*, J. Math.Anal.Appl., vol. 64, pp. 348–353, 1978.
[5] C. Dacka, *“On the Controllability of a Class of Nonlinear Systems”*, IEEE Trans. Automat.Control, vol. 25, pp. 263–266, 1980.
[6] K. Balachandran and D. Somasundaram, *“Existence of Optimal Control for Nonlinear Systems with Quadratic Performance”*, J.Austral.Math.Soc, ser. B, vol. 29, pp. 249–255, 1987.
[7] A.P. Afanas’ev, S.M. Dzyuba, S.M. Lobanov, and A.V. Tyutyunnik, *“Successive Approximation and Suboptimal Control of Systems with Separeted Linear Part”*, Appl. Comp. Math., vol.2, no. 1, pp. 48–56, 2003.
[8] A.P. Afanas’ev, S.M. Dzyuba, S.M. Lobanov, and A.V. Tyutyunnik, *“On a Suboptimal Control of Nonlinear Systems via Quadratic Criteria”*, Appl.Comp. Math., vol. 3, no. 2, pp. 158–169, 2004.
[9] Афанасьев А. П., Дзюба С. М. *“Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию”*, Тр. ИСА РАН, Т. 32, с. 49–62, 2008.
[10] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *“Качественная теория дифференциальных уравнений”*, М.: Едиториал УРСС, 2004.
[11] О. В. Сухорослов,*“ Унифицированный интерфейс доступа к алгоритмическим сервисам в Web ”*, Труды ИСА РАН, Т. 46. - М.: КРАСАНД, 2009. - 304 с. (с. 60-82).
[12] A.P. Afanas’ev and S.M. Dzyuba, *“Method for Constructing Minimal Sets of Dynamical Systems”*, Differenrial Equations, vol. 51, №7, pp. 831-837, 2015.
[13] A.P. Afanas’ev and S.M. Dzyuba,*"Method for Construction Approximate Analytic Solutions of Differential Equations with a Polynomial Right-Hand Side",* Comp. Math and Math. Physics, vol. 55, №10, pp.1665-1673.