Алгоритм увеличения потока в произвольных смешанных сетях

Я.Р. Гринберг, ИППИ РАН

Хорошо известен алгоритм Форда и Фалкерсона увеличения потока в ориентированной сети с ограничениями на пропускные способности дуг. Алгоритм основан на так называемом методе расстановки пометок, который позволяет на каждом шаге либо увеличить поток, либо констатировать, что данный поток максимальный. В [1] показано, что этот алгоритм может быть применен к неориентированным сетям и к смешанным ориентированным сетям. (т.е. таким, в которых, наряду с ограничениями на пропускные способности дуг, определены также ограничения на пропускные способности узлов). Метод расстановки пометок неприменим к неориентированным смешанным сетям. Другой недостаток – в случае смешанных сетей применение метода расстановки пометок необходимо проводить в сетях с удвоенным количеством узлов.

В настоящей работе представлен универсальный алгоритм увеличения потока для смешанных сетей произвольного вида. Именно, в предположении, что все источниковые дуги направлены из источника, а все стоковые дуги – в сток, требуется найти максимум величины $f(s,N)$ при следующих ограничениях

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
& f(x,N)-f(N,x)=0, && x\neq s,t\\
& 0\le f(x,y)\le c_1+c,\\
& 0\le f(y,x)\le c_2+c\\
& f(x,N)\le k(x) && x\neq t\\
& f(N,t)\le k(t),
\end{aligned}
$$

Исходными данными для алгоритма являются «текущий» поток из источника в сток и константы ограничений (1). «Текущий» поток представляет собой совокупность дуговых потоков, т.ч. $f(x,y)\bullet f(y,x)=0$, и, таким образом, рассматривается как ориентированная сеть. Именно для него и выполнены ограничения (1).

По этим данным определяется другая сеть, которая названа дополнительной. В дополнительной сети ненасыщенные элементы остаются неизменными, насыщенные дуги (x,y) заменяются на дуги (y,x), а для насыщенных узлов определяются правила прохождения этих узлов. Вопрос об увеличении потока или невозможности такого увеличения (максимальности потока) решается по достижимости стока из источника в дополнительной сети.

[1] Л.Форд, Д.Фалкерсон Потоки в сетях, «МИР», М. 1966.