

РАСШИРЕННОЕ МУЛЬТИКОЛЬЦО С МИНИМАЛЬНЫМ ДИАМЕТРОМ

М.Ф. Каравай (mkaravay@ipu.ru), В.С. Подлазов (podlazov@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

1. Введение

Многомерные торы широко используются как системные сети для суперкомпьютеров. Так в суперкомпьютере *Gemini* [1] системная сеть является 3-мерным тором, в котором каждое измерение состоит из набора одинаковых дуплексных колец. Набор одинаковых колец имеет достаточно большой диаметр, который не зависит от числа колец.

Известен способ сокращения диаметра набора колец за счет превращения его в набор коммутируемых колец с разными шагами [2]. Такой набор колец мы называем мультикольцом. Для уменьшения диаметра системной сети необходимо иметь мультикольца с минимальным диаметром. Диаметр равный 2 достигается в 2-мерных мультикольцах.

Частным случаем 2-мерного мультикольца является m -ичное мультикольцо, в котором шаги колец задаются значениями разрядов в m -ичной системы счисления. Такое мультикольцо является распределенным коммутатором [2, 3] с диаметром 1, который достигается на произвольных перестановках.

Распределенный полный коммутатор может иметь, также, структуру 2-мерного m -ичного гиперкуба [4, 5] или квазиполного графа [6–10]. Таблицы инцидентности квазиполных графов задается симметричными блок-схемами [11].

Сети со структурой квазиполных графов позволяют строить распределенные коммутаторы с $\sigma \geq 1$ различными каналами между узлами, тогда как 2-мерные m -ичные мультикольца и гиперкубы – только с 1 каналом.

В данной работе рассматривается новый вид 2-мерных мультиколец, при котором они имеют большее число узлов и могут иметь несколько различных каналов при том же числе портов в узлах, как в распределенном коммутаторе.

Постановка задачи и полученные решения

Пусть имеется коммутируемое мультикольцо [6] с N узлами степени r , состоящее из набора r колец с шагами ${}^0S = 1, {}^1S, \dots, {}^{r-1}S$, где ${}^iS \neq {}^jS$. Будем характеризовать такое мультикольцо набором длин шагов $C_r = ({}^0S, \dots, {}^{r-1}S)$ и задавать его парой $\{N, C_r\}$.

Мультикольцо $\{N, C_r\}$ является 2-мерной сетью, если любые два узла соединяет хотя бы один путь длиной не больше 2. Эта сеть содержит σ независимых каналов, если между любыми двумя узлами существует не менее σ ($1 \leq \sigma \leq r/2$) разных путей. Такую сеть мы называем расширенным мультикольцом и задаем тройкой $\{\sigma, N, C_r\}$. Как видно из определения расширенного мультикольца его диаметр равен 2. На рис. 1 дан пример мультикольца для $r=3$.

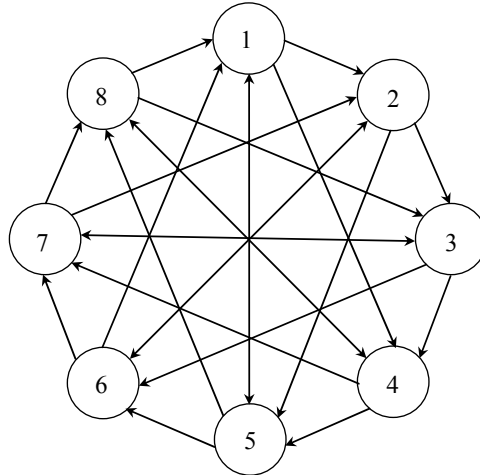


Рис. 1. Расширенное мультикольцо $\{1, 8, (1, 3, 4)\}$.

В табл. 1 приведена схема маршрутизации для мультикольца на рис. 1.

Таблица 1. Маршрутизация в $\{1, 8, (1, 3, 4)\}$

Длина маршрута	1	2	3	4	5	6	7
Маршрут по дугам	1	1+1	3	4	1+4	3+3	3+4

Здесь сразу возникает вопрос о существовании и построении расширенного кольца $\{\sigma, N, C_r\}$. В частности, какое максимальное число узлов N^* достигается при заданных r и σ ? Какой вид имеет C_r в мультикольце $\{\sigma, N^*, C_r\}$?

У авторов нет теоретических ответов на поставленные вопросы. Задача решалась экспериментальным путем посредством переборного построения C_r при заданных r и σ . Способ ее решения рассматривается в следующем разделе.

Здесь же представляются некоторые предварительные результаты, полученные на ограниченных вычислительных мощностях (персональном компьютере). В табл. 2 приводятся найденные значения $N^*(r)$ для ряда малых r при $\sigma=1$. Две верхние строки приводят $N^*(r)$ для расширенного мультикольца, а две нижние – $N(m)$ для 2-мерного

m -ичного мультикольца с той же степенью сетевых узлов $r = 2(m - 1)$. Видно, что при $r > 5$ имеет место соотношение $1,3N(m) \leq N^*(r) < 1,4N(m)$.

Таблица 2. Число узлов для расширенного мультикольца при $\sigma = 1$ и m -ичного мультикольца

r	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
N^*	9	13	19	21	30	35	43	51	65	85	108
m		3		4		5		6	7	8	9
N		9		16		25		36	49	64	81

Таблица 3. Число узлов расширенного мультикольца и квазиполного графа для некоторых σ

$\sigma=2$	r	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
	N^*	7	11	16	21	27	33	42	53	69	89
	m	3		4		5		6	7	8	9
	N	4		7		11		16	21	27	37
$\sigma=3$	r	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
	N^*	6	11	13	15	19	24	29	37	49	61
	m	3		4		5		6	7	8	9
	N	3		5		7		11	15	18	23
$\sigma=r/2$	r	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
	N^*			11		15		19	23	27	31
	m	3				5			7		9
	N			7		7			11		15

В табл. 3 приводятся значения $N^*(r)$ для ряда малых r при $\sigma = 2$, $\sigma = 3$ и $\sigma = r/2$.

Видно, что имеет место соотношение $N^*(r) > 2N(m)$.

Сравним сетевые узлы расширенного мультикольца и m -ичного мультикольца. Сложность первого M_r оценивается при $\sigma = 1$ соотношением $M_r < r^2/2 + 3r$. Сложность второго M_m задается соотношением $M_m = m^2 + 2m = (r/2 + 1)^2 + r + 2$. Поэтому $M_r < 2M_m$.

3. Способ решения

Расширенное мультикольцо с N узлами степени r задается таблицей смежности $A(N, r)$ с N строками и $r+1$ столбцами (табл. 4). В каждой строке первая ячейка содержит номер приемника, в который входят дуги, исходящие из узлов источников, номера которых находятся в остальных ячейках. Каждый столбец в $A(N, r)$ представляет собой циклическую последовательность $1, 2, \dots, N$ смещенную вниз на длину дуги между источником и приемником. Поэтому значения в C_r задаются как разница номеров строк $A(N, r)$, содержащих 1 в столбцах источников и приемника.

Параметр σ учитывается только при построении таблиц $A^*(N^*, r)$, задающих расширенные мультикольца для разных σ .

Таблица 4. Таблица смежности $A^*(8, 3)$ для мультикольца $\{1, 8, (1, 3, 4)\}$ на рис. 5.

Приемник	Источники		
1	8	6	5
2	1	7	6
3	2	8	7
4	3	1	8
5	4	2	1
6	5	3	2
7	6	4	3
8	7	5	4

Каждой таблице $A(N, r)$ ставятся в соответствие матрицы $N \times N$ смежности приемников и источников A и числа путей между ними $\Omega = A + A^2$.

$A(N, r)$ задает расширенное мультикольцо с σ путями, если значение каждой ячейки $\Omega_{i,j}$ удовлетворяет условию $\Omega_{i,j} \geq \sigma$, и обозначается как $A^*(N^*, r)$.

Поиск расширенных мультиколец для заданных N^* , r и σ состоит в переборе всех разных $A(N^*, r)$ и выделении из них тех $A^*(N^*, r)$, которые удовлетворяют условию $\Omega_{i,j} \geq \sigma$ для всех $0 \leq i, j \leq N^* - 1$.

Однако этот поиск осложняется тем, что при заданных r и σ число N^* заранее неизвестно. Поэтому осуществляется и ограниченный перебор числа узлов N^* .

Поиск решений является NP -трудной по r задачей. Для $r < 10$ на персональном компьютере удалось найти все решения. Для четных $r \geq 10$ удалось сократить перебор за счет поиска только симметричных решений, в которых сумма шагов i -го и $(r+1-i)$ -го колец равна N^* . Это позволило найти все симметричные решения в диапазоне $10 \leq r \leq 16$. По нашей оценке для поиска всех симметричных решений в области $18 \leq r \leq 24$ необходимо использовать кластерные системы с сотнями процессорных ядер, а в области $r > 24$ – с тысячами и десятками тысяч ядер.

3. Использование расширенного мультикольца

Для расширенных мультиколец с четным r всегда существуют симметричные наборы C_r . В частности, для $r = 8$ и $N^* = 35$ это $C_8 = (1, 6, 7, 10, 28, 29, 34)$. Он может быть представлен как набор 4 дуплексных колец с шагами $C_8 = (\pm 1, \pm 6, \pm 7, \pm 10)$.

Аналогично для $r=16$ и $N^*=108$ это набор 8 дуплексных колец с шагами $C_{16} = (\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 12, \pm 26, \pm 27, \pm 45, \pm 46)$.

Коммутацию пакетов в расширенных мультикольца можно осуществлять в режиме «на лету» (cut-through). В этом режиме любой узел осуществляет анализ адресной части поступающего пакета, и он (пакет) коммутируется на выходной канал, только если нет собственного пакета для передачи в этот же канал. В противном случае передается собственный пакет, а поступающий пакет буферизуется. Режим «на лету» обеспечивает минимальные задержки коммутации. В частности, для m -ичных мультиколец задержки «на лету» будут сопоставимы с задержками на прокладку прямых каналов, который обычно применяется в распределенных коммутаторах.

Использование расширенных мультиколец с несколькими каналами ($\sigma > 1$) позволяет повышать пропускную способность мультиколец, не уменьшая числа узлов в них, за счет увеличения числа портов на величину 2 при увеличении σ на 1.

3. Заключение

В статье рассмотрен новый вид мультиколец с минимальным диаметром – расширенные мультикольца. Они позволяют строить сети с большим числом узлов, чем в распределенных коммутаторах, и иметь несколько различных каналов между узлами.

Область применения расширенных мультиколец – это реализация отдельных измерений в многомерных торах. Так двумерный тор из расширенных мультиколец с $r=16$ будет содержать 11664 узлов с 32 сетевыми портами в каждом узле и иметь диаметр 4.

Для сравнения сеть *Dragonfly* [4] имеет близкое число узлов с 40 сетевыми портами в каждом узле. Она имеет структуру 4-мерного обобщенного гиперкуба, в котором 2 младших и 2 старших измерения являются распределенными коммутаторами. Для этой сети существуют такие перестановки, реализация которых потребует 4 скачков. Поэтому сеть *Dragonfly* имеет плавающий диаметр в $2 \div 4$ скачка.

Двумерный тор с расширенными мультикольцами при $r=18$ или $r=20$ будет иметь сходное число узлов при 2 или 3 независимых каналах, что позволяет иметь в нем вдвое или втрое большее быстродействие.

Список литературы

1. *Alverson R., Roweth D. and Kaplan L., Cray Inc. // The Gemini System Interconnect // 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. – 2009. – P. 83 – 87.*

2. Алленов А.В., Подлазов В.С. Пропускная способность набора кольцевых каналов II. Кольцевые коммутаторы // *АиТ.* – 1996. – № 4. – С. 162 – 172.
3. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Распределенный полный коммутатор как «идеальная» системная сеть для многопроцессорных вычислительных систем // *Управление большими системами.* – М.: ИПУ РАН, 2011. – Выпуск 34. С. 92 – 116.
4. Alverson R., Roweth D., Kaplan L. and Roweth D. Cray XC[®] Series Network // URL: <http://www.cray.com/Assets/PDF/products/xc/CrayXC30Networking.pdf>.
5. Kim J., Dally W. J., Scott S. and Abts D. Technology-driven, highly-scalable dragonfly topology // *Proceedings of the 35th annual international symposium on computer architecture – ISCA'2008.* – P. 77 – 88.
6. Подлазов В.С., Соколов В.В. Однокаскадные коммутаторы большой размерности для многопроцессорных и многомашинных вычислительных систем // *Пробл. управления.* – 2006. – № 6. – С. 19 – 24.
7. Николаев А.Б., Подлазов В.С. Отказоустойчивое расширение системных сетей многопроцессорных вычислительных систем // *АиТ.* – 2008. – № 1. – С. 162 – 170.
8. Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С. Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем) // *АиТ.* – 2009. – № 2. – С. 153 – 170.
9. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Метод инвариантного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем. Идеальная системная сеть // *АиТ.* – 2010. – № 12. – С. 166 – 176.
10. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Расширенные блок-схемы для идеальных системных сетей // *Пробл. управления.* – 2012. – № 4. – С. 45 – 51.
11. Холл М. Комбинаторика.– М.: Мир, 1970. – 424 с. – Гл. 10–12.