Бабенко В. Н. Невечеря А.П.

Доклад «Алгоритмы и устройства для высокопроизводительных вычислительных систем»

На производительность ЭВМ оказывают влияние многие факторы. Среди них тактовая частота, а также распараллеливание и конвейеризация вычислительных процессов.

Сказанным определяются направления поисков математиков-вычислителей при разработке новых алгоритмов: они (алгоритмы) должны допускать конвейеризацию и распараллеливание вычислений. Кроме того, они должны быть сведены к коротким операциям, чтобы обеспечить высокую тактовую частоту для работы вычислительных элементов.

Нами была проделана определенная работа, в результате которой, в частности, разработан алгоритм нормировки вектора, отвечающий указанным требованиям. Также спроектированы вычислительные устройства (ВУ), реализующие этот алгоритм. На устройства получены патенты №2449354 и №2473961.

Алгоритм нормировки вектора

Негативным фактором конвейеризации (особенно для вычислительных систем, работающих в режиме реального времени) является задержка сигнала – промежуток времени между поступлением прообраза на вход и появлением образа на выходе конвейера. Влияние этого фактора, значение которого определяется произведением продолжительности такта на длину конвейера. Очевидно, для уменьшения первого множителя следует применять короткие операции, для уменьшения второго – вести поиски экономичных алгоритмов.

Ниже представляется алгоритм нормировки вектора, допускающий распараллеливание, причем для вычисления одной компоненты нормированного вектора требуется всего лишь $m/2$ операций (сложение+сдвиг).

Теорема 1. Пусть число x удовлетворяет неравенству $2^{-n} \le x < 2$ и

$x^{-\alpha} = 1 + \theta 2^t u$,(1.1)

где $\alpha = 1/n, n \in \{1,2,...\}$, $\theta = \begin{cases} 1, \text{если } x < 1, \\ 0, \text{если } x = 1, \\ -1, \text{если } x > 1, \end{cases}$ t – целое число, $2^{-1} \le u < 1$. Пусть

$J(\theta,t,u,z) = \left| \dfrac{1+\theta 2^t f(u,z) - x^{-\alpha}}{1+\theta 2^t f(u,z)} \right|$ — относительная погрешность приближения инверсии $x^{-\alpha}$ двучленом $1+\theta 2^t f(u,z)$, где $f(y,z) = \begin{cases} 2^{-1}, \text{если } y < z \\ 1 \quad, \text{если } \mathrm{z} \le \mathrm{y} \end{cases}$.

Если $\bar{z} = \dfrac{3+\theta 2^{t+1}}{4+3\theta 2^t}$, то справедлива оценка:

$J(\theta,t,u,\bar{z}) \le J(\theta,t,\bar{u},\bar{z})$,(1.2)

где $\bar{u} = \bar{\mathrm{z}}$,

$J(\theta,t,\bar{u},\bar{z}) = \dfrac{2^{t-2}}{1+3\theta 2^{t-2}}$,(1.3)

причем $J(\theta,t,\bar{u},\bar{z})$ есть наименьшая точная верхняя грань множества значений функционала $J(\theta,t,u,z)$ на множестве $\{(u,z): 2^{-1} \le u < 1, 2^{-1} \le z < 1\}$.

Доказательство. …

Теорема 2. Пусть x произвольное число из полуинтервала $[2^{-n},1)$. Последовательность $\{x_i\}$ определим соотношениями:

$x_0 = x$,

$x_i = x_{i-1}(1+\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}} f(u_{i-1}, z_{i-1}))^n$,(1.5) где

$$\theta_{i-1} = \begin{cases} 1, \text{если } x_{i-1} < 1, \\ 0, \text{если } x_{i-1} = 1, \\ -1, \text{если } x_{i-1} > 1, \end{cases}$$

$$\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}} u_{i-1} = \frac{1 - \sqrt[n]{x_{i-1}}}{\sqrt[n]{x_{i-1}}}, (1.6)$$

$$2^{-1} \le u_{i-1} < 1, (1.7)$$

$$f(u_{i-1}, z_{i-1}) = \begin{cases} 2^{-1}, \text{если } u_{i-1} < z_{i-1}, \\ 1 \quad, \text{если } z_{i-1} \le u_{i-1}, \end{cases}$$

$$z_{i-1} = \frac{3 + \theta_{i-1} 2^{t_{i-1}+1}}{4 + 3\theta_{i-1} 2^{t_{i-1}}}.$$

Тогда последовательность $\{c_i\}, i = 1,2,\ldots$, где

$$c_i = \prod_{j=1}^{i} (1 + \theta_{j-1} 2^{-t_{j-1}} f(u_{i-1}, z_{i-1}))^n, (1.8)$$

сходится к $x^{-1/n}$, причем справедлива оценка скорости сходимости

$$\left| c_i - \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1} \right| < 2^{-2i} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1}. (1.9)$$

Доказательство. …